JOURNAL OF ALGEBRA 58, 70–93 (1979)

# Struktur und Transzendenzgrad von $\eta_{\alpha+1}$-Körpern und Ultrapotenzen von Körpern

CORNELIUS GREITHER

*Mathematisches Institut der Universität München, 8000 München 2, Germany*

*Communicated by A. Fröhlich*

Received January 18, 1978

## 1. EINLEITUNG

Ausgangspunkt der Arbeit ist die Frage nach der Struktur von Ultrapotenzen eines Körpers $K$. Einen Körper der Form $(\prod_I K_i)/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ maximales Ideal, nennt man ein *Ultraprodukt* der Familie $(K_i)$, wenn der $\mathfrak{m}$ zugeordnete Ultrafilter $\mathfrak{F} = \{I - \operatorname{trg}(x) \mid x \in \mathfrak{m}\}$ frei ist. Eine *Ultrapotenz* liegt vor, wenn alle $K_i = K$ sind. Wir beschränken uns auf den Fall $I = \mathbb{N}$.

Die Untersuchung von Ultraprodukten von Körpern (oder anderen Strukturen) hat von jeher oft modelltheoretischen Bezug. Wir erwähnen einige wichtige *Beispiele*: Der Satz von Ax und Kochen [3], "$\prod_P \mathbb{F}_p((t))/\mathfrak{m} \cong \prod_P \mathbb{Q}_p/\mathfrak{m}$" ($P$ sei die Menge der Primzahlen) lehrt, daß für jeden Satz in der elementaren Theorie der bewerteten Körper gilt: ($f$ ist in $\mathbb{F}_p((t))$ richtig $\leftrightarrow$ $f$ ist in $\mathbb{Q}_p$ richtig) für fast alle $p$. Aus einem Satz von Erdös *et al.* [11] folgt, daß für irgendzwei abzählbare reell abgeschlossene angeordnete Körper $K$, $L$ gilt $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} \cong L^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$, und hieraus ergibt sich, daß in der elementaren Theorie der reell abgeschlossenen angeordneten Körper jede geschlossene Formel beweisbar oder widerlegbar ist (sog. *Vollständigkeit*). Bei Ax und Kochen [3] findet man einen Isomorphiesatz für gewisse, sog. $\aleph_1$-pseudo-komplette bewertete Körper, der auf manche Ultrapotenzen anwendbar ist. Chang und Keisler ersetzen bei ihrer Darstellung der Theorie von Ax und Kochen und von Jeršov (unabhängig von den erstgenannten) die $\aleph_1$-Pseudo-Komplettheit durch $\omega_1$-Saturiertheit von bewerteten Körpern. Die Beweise beruhen im Prinzip auf der "back-and-forth"-Technik, die auch wir anwenden.

Unsere Untersuchungen haben eher algebraische Zielsetzung. Am Ende des zweiten Abschnitts findet sich eine modelltheoretische Folgerung, die wir gleich angeben werden (s.u.).

Wir verfolgen zweierlei Probleme: erstens bestimmen wir allgemein den Transzendenzgrad einer Ultrapotenz $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ über $K$. Damit verallgemeinern wir ein Ergebnis von Hewitt [15] für $K = \mathbb{R}$. Die allgemeine Formel für den Transzendenzgrad ergibt sich als $\operatorname{card}(K)^{\aleph_0}$, wobei die Abhängigkeit von der



0021-8693/79/050070-24$2.00/0

Kardinalität von $K$ wohl das Bemerkenswerteste ist. (3. Abs.) Zweitens behandeln wir den Fall $K$ abzählbar und den Fall $K$ reell abgeschlossen genauer (der Fall $K$ algebraisch abgeschlossen erweist sich als sehr trivial), und fragen, ob *alle* Körper $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ isomorph oder sogar isomorph über $K$ sind. Aus der Arbeit [17] von *Keisler* ergibt sich für abzählbares $K$ auf beide Fragen leicht eine positive Antwort (2.2), aber sein Beweis verwendet Saturiertheit von Ultrapotenzen und damit an entscheidender Stelle die Abzählbarkeit der betrachteten Theorie, ist also nicht sofort auf größere Körper zu verallgemeinern. Eine positive Antwort auf die erste (nicht aber die zweite) Frage gibt die bereits zitierte Arbeit [11] für reell abgeschlossene $K$ mit card$(K) \leqslant \mathfrak{c}$. Dort wird mit dem Begriff "$\eta_1$" von Hausdorff [13] gearbeitet, der für eine total geordnete Menge in etwa besagt, daß sich zwischen zwei höchstens abzählbare Teilmengen immer noch etwas einschieben läßt. Diese gegenüber dem Saturiertheitsbegriff (der sich daraus entwickelt hat) eher altmodische Theorie greifen wir auf, um unter geeigneten Voraussetzungen an den angeordneten Körper $K$ auch auf die zweite Frage positive Antworten zu bekommen. Dafür entwickeln wir eine Hilfstheorie über $\zeta_0$-*Körper* (s.u.), wobei sich eine gewisse Dualität der Begriffe $\zeta_0$ und $\eta_1$ zeigen wird. Wir zeigen ferner, daß jeder reell abgeschlossene $\eta_\alpha$-Körper über einem $\zeta_0$-Körper $K$ als *angeordneter Körper über* $K$ $\omega_\alpha$-saturiert ist. *$K$ heißt $\zeta_0$-Körper, wenn jede nichtleere Teilmenge $A$ von $K$ eine höchstens abzählbare, nach oben konfinale Teilmenge besitzt.* $\mathbb{R}$ besitzt diese Eigenschaft offenbar, es gibt aber auch viel größere $\zeta_0$-Körper. Wir beweisen: Je zwei $\eta_{\alpha+1}$-Körper mit Transzendenzgrad höchstens $\aleph_{\alpha+1}$ über einem $\zeta_0$-Körper $K$ sind über $K$ isomorph (2.5, 2.6, 2.7). Daraus folgt insbesondere, daß (GCH angenommen) für einen $\zeta_0$-Körper $K$ mit card$(K) \leqslant \mathfrak{c}$ alle $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ über $K$ isomorph sind. Für $K = \mathbb{R}$ ist dies eine interessante Aussage über gewisse Nonstandardmodelle von $\mathbb{R}$. (Einen Beweis, daß die Körper $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ $\eta_1$ sind, findet man z.B. in [11].)

Entscheidend geht die Tatsache ein, daß die Eigenschaft $\zeta_0$ sich von $K$ auf $L$ vererbt, falls tr. $\deg_K(L) \leqslant \aleph_0$. (Es ist nicht einmal sofort klar, daß sich $\zeta_0$ auf *algebraische* Erweiterungen vererbt. Z.B. besitzt der $\zeta_0$-Körper $\mathbb{R}(t)$ (angeordneter Funktionenkörper in einer Variablen) angeordnete algebraische Erweiterungen vom Grad $\mathfrak{c}$.) Im 4. Abschnitt, der der Theorie der $\zeta_0$-Körper gewidmet ist, werden Aussagen wie die folgende bewiesen: Jeder $\eta_{\alpha+1}$-Körper über einem $\zeta_0$-Körper hat über diesem Transzendenzgrad mindestens $2^{\aleph_\alpha}$. Wir verwenden in diesem Abschnitt Hilfsmittel aus der Bewertungstheorie: den von *Krull* stammenden Begriff des maximal vollständigen Körpers, und den Begriff des (vollen) Potenzreihenkörpers. Hierzu verwenden wir die sogenannte natürliche (oder kanonische) Bewertung eines angeordneten Körpers.

Die Isomorphiesätze dieser Arbeit sind (wie die in [11]) ohne (CH) resp. (GCH) leer. In Abschnitt 5 beschreiben wir eine Konstruktionsmethode für $\eta_\alpha$-Körper, mit deren Hilfe sich auch leicht zeigen läßt (vgl. Satz 5.2): Falls $\aleph_\alpha^{\langle\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha$ regulär, so existiert ein reell abgeschlossener $\eta_\alpha$-Körper mit $\aleph_\alpha$ Elementen. Damit haben wir ein Resultat von Alling [1a] neu (einfacher) bewiesen, denn

$2^{<\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha \Rightarrow \aleph_\alpha^{<\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$. Dann fragen wir nach der Struktur von $\eta_1$-Körpern der (ja kleinstmöglichen) Kardinalität $\mathfrak{c}$ für $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Es zeigt sich, daß reell abgeschlossene Körper dieser Art mit allen denkbaren (d.h. regulären) Konfinalitätszahlen nach oben zwischen $\aleph_1$ und $\mathfrak{c}$ existieren. Dies beantwortet eine Frage in [11] negativ. Uber $\eta_1$-Körper der Form $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ gelingt keine derartige Aussage. Wir zeigen nur, gestützt auf Hechler [14], daß die Annahme "Alle $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ haben Konfinalität $\aleph_n$" für $n \geqslant 1$ beliebig zu ZFC konsistent ist. Für $n = 1$ ist die Annahme $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ dazu auch noch konsistent.

Wir verwenden ständig die klassische Theorie von Artin und Schreier über reell abgeschlossene Körper. Definitionen und die wichtigen Sätze findet man z.B. bei Lang [18]. Wir erwähnen einige wichtige Fakten:

(1) Der angeordnete Körper $K$ ist reell abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $K$ hat keine echten algebraischen angeordneten Erweiterungen $\Leftrightarrow$ $K(\sqrt{-1})$ ist algebraisch abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Die Summe von Quadraten in $K$ ist nie $-1$ und jedes $f \in K[X]$ mit $f = X^4 - a^2$ oder $\deg(f)$ ungerade hat eine Nullstelle (ein Kriterium, für das man die Ordnung nicht kennen muß). Ein reell abgeschlossener Körper hat genau eine Anordnung, und $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x$ Quadrat in $K$. Jeder Homomorphismus von einem reell abgeschlossenen in einen angeordneten Körper erhält die Ordnung.

(2) Zu jedem angeordneten Körper $K$ existiert bis auf Isomorphie eindeutig eine algebraische, reell abgeschlossene Erweiterung $\mathfrak{r}K$, der *reelle Abschluß* von $K$. Falls $K \subset L$, $L$ reell abgeschlossen, kann man $\mathfrak{r}K \subset L$ wählen. Jeden ordnungserhaltenden Homomorphismus $f: K_1 \to K_2$ kann man eindeutig zu $\mathfrak{r}f: \mathfrak{r}K_1 \to \mathfrak{r}K_2$ fortsetzen.

Gelegentlich verwendete Begriffe und Regeln, betreffend Ordinal- und Kardinalzahlen, kann man bei Alexandroff [1] finden.

## 2. Isomorphie von Ultrapotenzen von Körpern

In diesem Abschnitt verwenden wir die Ergebnisse der (mehr technischen) Abschnitte 3 und 4.

Wie üblich, bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Außerdem sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $K$ ein beliebiger Körper.

Die Menge $K^{\mathbb{N}}$ trägt in naheliegender Weise eine Ringstruktur als Produkt. Für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ sei $\mathrm{trg}(x) := \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 0\}$ der *Träger* von $x$.

Proposition. *Die Zuordnung $\Phi$:*

$$\{\mathfrak{J} \mid \mathfrak{J} \subset K^N \text{ Ideal}\} \to \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \text{ Filter auf } \mathbb{N}\}$$
$$\mathfrak{J} \mapsto \{\mathbb{N}\text{-trg}(x) \mid x \in \mathfrak{F}\}$$

stellt eine inklusionserhaltende Bijektion dar, bei welcher den maximalen Idealen genau die Ultrafilter entsprechen.

*Beweis.* Siehe [19, Theorem 15.5].

DEFINITION. Ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von $K^{\mathbb{N}}$ heißt *fixiert*, wenn $\Phi(\mathfrak{m}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid n_0 \in A\}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ist.

Es gelten folgende (bekannte) Aussagen:

(1) Das Maximalspektrum (= Primspektrum) von $K^{\mathbb{N}}$ hängt als topologischer Raum nicht vom Körper $K$ ab und kann mit der Stone-Čech-Kompaktifizierung eines abzählbaren diskreten Raums identifiziert werden (Vgl. u.a. [19, Aufg. 158]).

(2) Die Anzahl der nicht fixierten maximalen Ideale in $K^{\mathbb{N}}$ ist gleich $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ [19, Theorem 12.20].

Falls $K_0$ ein Unterkörper von $K$ ist, werden wir maximale Ideale von $K_0{}^{\mathbb{N}}$ bzw. $K^{\mathbb{N}}$, die zum selben Ultrafilter gehören, mit demselben Buchstaben, z.B. $\mathfrak{m}$, bezeichnen. Mit dieser Schreibweise gilt dann $K_0{}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} \hookrightarrow K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$, wir erhalten mit dieser Konvention also für jeden Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ einen Funktor $(-)^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ von der Kategorie der Körper in sich.

Für jedes nicht fixierte maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $K^{\mathbb{N}}$ heißt der Körper $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ eine *Ultrapotenz* von $K$. Man hat immer eine kanonische Einbettung $K \hookrightarrow K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ via konstanten Folgen. Uns interessiert die algebraische Struktur von solchen Ultrapotenzen als Körpern und auch als "Körpern über $K$", d.h. als $K$-Algebren. Die folgende Proposition ist bekannt und nicht tiefliegend:

PROPOSITION 2.1. *Sei $K$ ein reell oder algebraisch abgeschlossener Körper. Jede Ultrapotenz von $K$ ist wieder reell bzw. algebraisch abgeschlossen.*

*Beweis.* z.B. in [6, Ch. 5, 3.20] oder [10, 1.4, 4.1.9]. (Die Proposition hat rein modelltheoretischen Charakter.)

KOROLLAR. *Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ und jedes maximale nicht fixierte Ideal* $\mathfrak{m}$ *von $k^{\mathbb{N}}$ gilt*

$$k^{\mathbb{N}}/m \cong \overline{k(X_i)_{i\in I}}^{\mathrm{alg}}$$

*als Isomorphie von $k$-Algebren, wobei* $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(k)^{\aleph_0}$.

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich aus Satz 3.1 und Proposition 2.1. Denn je zwei algebraisch abgeschlossene Oberkörper von $k$ mit demselben Transzendenzgrad über $k$ sind über $k$ isomorph. Der Transzendenzgrad von $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ über $k$ ist nach 3.1. genau $\mathrm{card}(k)^{\aleph_0}$.

Für reell abgeschlossene Körper $k$ ist die Situation weit weniger einfach.

Dies liegt daran, daß die Operation "reeller Abschluß" nur dann bis auf Isomorphie eindeutig erklärt ist, wenn uns noch eine Anordnung vorliegt. Der Transzendenzgrad allein ist für reell abgeschlossene Körper keine vollständige Invariante (vgl. [2, Satz 11]), wir müssen also auch die Anordnung berücksichtigen. Dies ist auch sinnvoll, weil mit $k$ auch $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ in kanonischer Weise angeordnet werden kann: $\bar{x} \in k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ heißt positiv, wenn $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i > 0\}$ zum Filter von $\mathfrak{m}$ gehört.

Bevor wir uns ganz auf angeordnete Körper beschränken, beweisen wir zur Abrundung folgenden

Satz 2.2. *Sei $k$ ein beliebiger Körper mit $\aleph_0 \leqslant \operatorname{card}(k) \leqslant \mathfrak{c} = \aleph_1$. Je zwei Ultrapotenzen von $k$ der Form $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ sind als Körper isomorph, und sogar isomorph über $k$, falls $k$ abzählbar ist.*

*Beweis.* Nach [6, Ch. 5, L. 2.3] sind zwei Ultrapotenzen $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ und $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{n}$ beide zu $k$, also untereinander, elementar äquivalent in der First-order-Theorie der Körper und nach [17, Theorem 2.1] und [17a, 2.14] (jeder freie Ultrafilter auf einer abzählbaren Menge ist gut) stets auch $\aleph_1$-saturiert. Wenn $k$ abzählbar ist, sind $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ und $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{n}$ auch elementar äquivalent und $\aleph_1$-saturiert als Modelle der Theorie $T_k$ der Körper über $k$. $T_k$ erhält man aus der Theorie der Körper durch Hinzufügen abzählbar vieler Konstanten $c_\kappa$, $\kappa \in k$ mit der "Bedeutung" $c_\kappa = \kappa \in k$, und den Axiomen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, sowie abzählbar vieler Axiome der Form $c_\kappa + c_\lambda = c_{\kappa+\lambda} = c_{\kappa+\lambda}$, $c_\kappa c_\lambda = c_{\kappa\lambda}$ für alle $\kappa, \lambda \in k$. Nach [17, L. 1.1] sind also $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ und $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{n}$ isomorph wie behauptet, denn wegen Bemerkung 3.3 ist $\operatorname{card}(k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}) = \operatorname{card}(k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{n}) = \mathfrak{c} = \aleph_1$.

*Bemerkung.* Man braucht die Abzählbarkeit von $k$ dafür, daß die Theorie $T_k$ eine abzählbare Theorie ist. Anderenfalls gelingt es nicht, zu zeigen, daß Ultrapotenzen mit abzählbarer Indexmenge saturiert sind. Ein Beispiel in [17, Ex. 4.5] zeigt, daß es Theorien mit $\mathfrak{c}$ Prädikaten gibt, derart daß zwei nichtisomorphe Ultrapotenzen $A^{\mathbb{N}}/D$ ein und desselben abzählbaren Modells $A$ existieren. Diese Schwierigkeit ist ähnlich wie beim Verallgemeinern des Satzes von Erdös, Gillman und Henriksen auf $\mathbb{R}$-Isomorphie (s.u.). Im induktiven Beweis in [11] hat man es "unterwegs" immer mit abzählbaren Teilkörpern zu tun und kann die $\eta_1$-Eigenschaft ausnützen. Will man Isomorphie über $\mathbb{R}$, so treten an die Stelle der abzählbaren die Teilkörper mit abzählbarem Transzendenzgrad über $\mathbb{R}$.

Satz 2.2 läßt sich für uns also nicht verallgemeinern. Deshalb gehen wir den von Erdös, Gillman und Henriksen eingeschlagenen Weg über $\eta_1$-Körper.

Definitionen. (1) Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl und $A$ eine total geordnete Menge. A bzw. der Ordnungstyp von $A$ heißt $\eta_\alpha$: $\Leftrightarrow$ Für beliebige Teilmengen $M, N \subset A$ mit $\operatorname{card}(M \cup N) < \aleph_\alpha$ und $M < N$ (d.h. für alle $x \in M$, $y \in N$ ist

$x < y$) existiert ein $z \in A$ mit $M < z < N$ (d.h. für alle $x \in M, y \in N$ ist $x < z$ bzw. $z < y$). Hierbei dürfen $M$ oder $N$ auch leer sein.

Ein angeordneter Körper heißt $\eta_\alpha$-*Körper*, wenn er als geordnete Menge $\eta_\alpha$ ist (Hausdorff [13, p. 180f]).

(2) Ein reell abgeschlossener $\eta_1$-Körper der Kardinalität $\aleph_1$ heißt $\rho$-*Körper*. (Reell abgeschlossene Körper haben genau eine Anordnung!)

(3) Sei $A$ wieder eine beliebige total geordnete Menge. $A$ heißt $\zeta_0$-*Menge*: $\Leftrightarrow$ (i) Zu jeder Teilmenge $B \subset A$ existiert eine nach oben konfinale Teilmenge $B_0 \subset B$ mit $\mathrm{card}(B_0) \leqslant \aleph_0$. Dabei bedeutet "nach oben konfinal," daß zu jedem $b \in B$ ein $b_0 \in B_0$ mit $b_0 \geqslant b$ gefunden werden kann. (ii) Zu jeder Teilmenge $B \subset A$ existiert eine nach unten konfinale Teilmenge $B_0$ mit $\mathrm{card}(B_0) \leqslant \aleph_0$ (lies $\geqslant$ für $\leqslant$ in $i$)).

Auch hier spricht man gegebenenfalls von angeordneten $\zeta_0$-Körpern.

*Beispiele.* Zu (1): Für jeden Körper $K \subset \mathbb{R}$ ist jede Ultrapotenz $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ ein $\eta_1$-Körper der Kardinalität $\mathfrak{c}$ (s. [11, Theorem 3.4]). Falls $K$ reell abgeschlossen ist und die Kontinuumshypothese (i.f. kurz CH) gilt, sind diese Ultrapotenzen also $\rho$-Körper.

Nach [13, p. 44] existiert höchstens dann ein $\eta_{\alpha+1}$-Körper der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$, wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ gilt. Im Abschnitt 5 zeigen wir, daß diese Bedingung auch hinreicht (5.2).

Zu (2): Aus dem ersten Beispiel ergibt sich: Genau wenn CH gilt, gibt es $\rho$-Körper. Unser Ziel ist u.a., zu beweisen, daß je zwei $\rho$-Körper, die einen Teilkörper von $\mathbb{R}$ enthalten, über diesem isomorph sind.

Zu (3) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind sicher $\zeta_0$-Körper. Man kann sich überlegen, daß mit $k$ stets auch $k((T))$ $\zeta_0$-Körper ist (dies beweisen wir später mit). Die Anordnung auf $k((T))$ sei dabei die "gewöhnliche", mit: $\sum_{-r}^{\infty} \kappa_i T^i \leqslant \sum_{-s}^{\infty} \lambda_i T^i \Leftrightarrow$ Falls $n = \min(i \mid \kappa_i \neq \lambda_i) < \infty$, dann $\kappa_n < \lambda_n$. (Für $i < -r$ sei $\kappa_i = 0$, für $j < -s$ sei $\lambda_j = 0$.)

SATZ 2.3 [11]. *Gelte CH. Dann sind alle $\rho$-Körper, insbesondere alle Ultrapotenzen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$, untereinander isomorph.*

Den Beweis findet man in [11]. Den Ansatz wollen wir zum Beweis einer Verallgemeinerung verwenden (Satz 2.5) und isolieren deshalb zuerst ein Lemma.

LEMMA 2.4. *Seien $K'$ und $L'$ beliebige formalreelle Körper, $K_0 \subset K'$, $L_0 \subset L'$, $K_0$ und $L_0$ reell abgeschlossen, $\varphi\colon K_0 \to L_0$ ein Isomorphismus (der folglich die Ordnung erhält), $t \in K' - K_0$. Sei $s \in L'$ derart, daß für alle $a, b \in K_0$ gilt: $a < t < b \Rightarrow \varphi(a) < s < \varphi(b)$.*

*Dann läßt sich* $\varphi$ *zu*

$$\psi\colon K_0(t) \to L_0(s)$$

*fortsetzen, wobei* $\psi$ *ein ordnungserhaltender Isomorphismus mit* $\psi(t) = s$ *ist.*

*Beweis.* Siehe [11, p. 545].

Im Abschnitt 5 interessieren wir uns für den Fall $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Hier formulieren und beweisen wir die angekündigte Verallgemeinerung von 2.3:

SATZ 2.5. *Sei* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ *und* $k$ *ein beliebiger* $\zeta_0$*-Körper. Dann sind je zwei reell abgeschlossene* $\eta_1$*-Oberkörper von* $k$ *mit Transzendenzgrad* $\mathfrak{c}$ *über* $k$ *isomorph über* $k$.

KOROLLAR. *Zwischen je zwei Nonstandardmodellen von* $\mathbb{R}$, *die sich als Ultrapotenzen von* $\mathbb{R}$ *mit abzählbarer Indexmenge realisieren lassen, existiert ein Isomorphismus, der alle Standardzahlen fest läßt.*

*Bemerkung.* Das Korollar folgt nicht aus Satz 2.3, weil in Nonstandarderweiterungen $K$ von $\mathbb{R}$ die Menge $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ nicht mehr dicht liegt. bez. der Ordnungstopologie. (Wäre dies der Fall, so würde das Korollar folgendermaßen aus 2.3 folgen: Jeder Isomorphismus, der $\mathbb{Q}$ festläßt, muß auch $\mathbb{R}$ festlassen, weil er automatisch in der Ordnungstopologie stetig ist.) Man kann sich sogar überlegen, daß $\mathbb{Q}$ in $K$ schon dann bez. der Ordnungstopologie abgeschlossen ist, wenn der angeordnete Körper $K$ infinitesimale Elemente enthält.

*Beweis von* 2.5. Seien $K$ und $L$ zwei Körper wie im Satz.

(1) Wähle in $K$ bzw. $L$ eine $k$-Transzendenzbasis $(t_i \mid i \in \aleph_1)$ bzw. $(s_i \mid i \in \aleph_1)$.

(2) Definiere durch Induktion über $i \in \aleph_1$ Türme von reell abgeschlossenen Unterkörpern $K_i$ von $K$ bzw. $L_i$ von $L$ mit einer verträglichen Folge von $K$-Isomorphismen $\varphi_i\colon K_i \to L_i$, sodaß tr. $\deg_k(K_i) \leq \aleph_0$ und $\bigcup K_i = K$, $\bigcup L_i = L$. Für $i = 0$ nehmen wir $K_0 := L_0 := \mathfrak{r}k$, $\varphi_0 := \mathfrak{r}id_k = id_{\mathfrak{r}k}$. Diese Wahl stellt sicher, daß alle $\varphi_i$ auf $k$ die Identität sein werden. Der Induktionsschritt auf eine *Limeszahl* $i$ liegt auf der Hand:

$$K_i := \bigcup_{j<i} K_j, \qquad L_i := \bigcup_{j<i} L_j, \qquad \varphi_i := \bigcup_{j<i} \varphi_j.$$

$l \to l + 1 = i$, $i$ *gerade* Nachfolgerzahl: Wähle $j$ minimal mit $t_j \notin K_l$ (wären alle $t_j$ in $K_l$, so wäre $K_l = K$, und das geht nicht wegen der verschiedenen Transzendenzgrade). Nach Voraussetzung haben wir einen Isomorphismus $\varphi_l$: $K_l \to L_l$. $t_j$ definiert in $K_l$ eine Linksklasse $A = \{x \in K_l \mid x < t_j\}$ und eine Rechtsklasse $B = \{x \in K_l \mid x > t_j\}$. Weil $K_l$ reell abgeschlossen ist, erhält $\varphi_l$ die Anordnung, also gilt in $L$: $\varphi_l(A) < \varphi_l(B)$. Da $A$ und $B$ leider nicht abzählbar zu sein brauchen, können wir die $\eta_1$-Eigenschaft in $L$ nicht direkt ausnützen. Wir wissen nur, daß $A$ und $B$ Teilmengen des Körpers $K_l$ sind, der über $k$

höchstens abzählbaren Transzendenzgrad hat. Aus Satz 4.7 folgt jetzt: Es gibt abzählbare Teilmengen $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$, die in $A$ bzw. $B$ nach oben bzw. unten konfinal sind. Dann sind auch $\varphi_l(A_0)$ in $A$ und $\varphi_l(B_0)$ in $B$ konfinal, und mit Hilfe der $\eta_1$-Eigenschaft von $L$ können wir jetzt ein $z \in L$ mit $\varphi_l(A_0) < z < \varphi_l(B_0)$, also auch $\varphi_l(A) < z < \varphi_l(B)$ finden. Nach Lemma 2.4 läßt sich $\varphi_l$ mittels $t_j \to z$ zu einem Isomorphismus $K_l(t_j) \to L_l(z)$ fortsetzen, der die Ordnung erhält. Damit bekommt man auch einen Isomorphismus von $\mathfrak{r}(K_l(t_j)) =: K_{l+1}$ nach $\mathfrak{r}(L_l(z)) =: L_{l+1}$, den man $\varphi_{l+1}$ nennt und der $\varphi_l$ fortsetzt.

$l \to l+1 = i$, *i ungerade* Nachfolgerzahl: Verfahre ebenso, indem man die Rollen von $K_l$ und $L_l$ vertauscht und $s_j$ für $t_j$ liest.

Durch diese Zickzack-Methode ("back and forth") wird garantiert, daß $\bigcup K_i = K$ und $\bigcup L_i = L$ wird. Man sieht nämlich leicht durch transfinite Induktion über $\aleph_1$: $t_i \in K_{2i+2}$, $s_i \in L_{2i+1}$ für alle $i \in \aleph_1$, und außerdem ist $\bigcup K_i$, und ebenso $\bigcup L_i$, reell abgeschlossen. Nach Definition von $(s_i)$ und $(t_i)$ ist aber $\mathfrak{r}(k(s_i)) = L$, $\mathfrak{r}(k(t_i)) = K$. Also ist $\bigcup \varphi_i$ ein Isomorphismus zwischen $K$ und $L$.

Damit ist unser Hauptergebnis über $\zeta_0$-Körper bewiesen.

*Bemerkung* 2.6. In der Voraussetzung von Satz 2.5 ist der Teil "mit Transzendenzgrad $\mathfrak{c}$" nach 4.10 unnötig stark. 4.10 besagt gerade, daß ein $\eta_1$-Körper über einem $\zeta_0$-Unterkörper stets Transzendenzgrad $\geqslant \aleph_1$ hat. Die Voraussetzung "tr. $\deg_k K \leqslant \mathfrak{c}$" erzwingt also, daß der Transzendenzgrad genau $\mathfrak{c}$ ist.

Satz 2.5 läßt sich sofort auf höhere Kardinalzahlen verallgemeinern:

SATZ 2.7. *Seien K und L zwei $\eta_{\alpha+1}$-Körper über dem $\zeta_0$-Körper k. Sei* tr. $\deg_k K$, tr. $\deg_k L \leqslant \aleph_{\alpha+1}$. *Dann sind K und L über k isomorph.*

*Beweis.* Die Transzendenzgrade sind festgelegt, denn genau wie in 2.6 ergibt sich mittels 4.10, daß der Transzendenzgrad von $K$ und $L$ über $k$ gleich $\aleph_{\alpha+1}$ ist. Jetzt läßt sich der Beweis von 2.5, mit Hilfe von 4.9 statt 4.7, unmittelbar verallgemeinern. (Aus 4.11 folgt: Der Satz ist für $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$ leer.)

Wir wollen noch eine modelltheoretische Folgerung aus dem Bewiesenen ziehen. Dazu benötigen wir

LEMMA 2.8. *Die Theorie der reell abgeschlossenen angeordneten Körper über einem festen angeordneten Körper $K$, $RC_K$ (die aus $T_K$ durch Hinzufügen von $<$ und den üblichen Axiomen von RCF entsteht), gestattet Quantorenelimination.*

*Beweis.* Nach [21, p. 85] genügt es zu zeigen:

(a) $RC_K$ erfüllt die "isomorphism condition". Dies sieht man genau wie in [21] für RCF, da jede Unterstruktur von einem Modell von $RC_K$ ein angeordneter Ring ist, der $K$ enthält.

(b) $RC_K$ erfüllt die "submodel condition": Wie in [21] zeigt man folgendes: Es reicht, für angeordnete Körper $K \subset L_1 \subset L_2$, $L_1$, $L_2$ reell abgeschlossen, und Polynome $p_1, ..., p_n \in L_1[X]$ sowie $b \in L_2$ zu beweisen: Es existiert $a \in L_1$ mit $p_i(a) = 0 \Leftrightarrow p_i(b) = 0$ und $p_i(a) < 0 \Leftrightarrow p_i(b) < 0$. Auch dieser Beweis läßt sich genau wie in [21] führen.

Damit ist gezeigt, daß $RC_K$ Quantorenelimination gestattet, das heißt also, daß jede Formel von $RC_K$ zu einer offenen (d.i. nur freie Variablen enthaltenden) Formel äquivalent ist. Aus dem Beweis des "Quantifier Elimination Theorem" bei [21, pp. 84–85] geht zudem hervor: Jede Formel $f$ ist zu einer offenen Formel äquivalent, die keine anderen freien Variablen als $f$ enthält.

KOROLLAR 2.9. *Die Theorie $RC_K$ ist vollständig und modellvollständig.*

*Beweis.* Siehe Lemma 2 in [21, p. 83] ($K$ ist Primmodell) sowie ex. 16, ebenda, p. 99.

SATZ 2.10. *Sei $K$ ein $\zeta_0$-Körper. Für jeden reell abgeschlossenen angeordneten Oberkörper $L \supset K$ sind äquivalent:*

(i) *$L$ ist ein $\eta_\alpha$-Körper.*

(ii) *$L$ ist als reell abg. angeordneter Körper $\omega_\alpha$-saturiert* [10].

(iii) *$L$ ist als Modell von $RC_K$ $\omega_\alpha$-saturiert.*

*Beweis.* (iii) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (i) sind trivial. Zu zeigen bleibt (i) $\Rightarrow$ (iii). (i) $\Rightarrow$ (ii) ist bekannt, vgl. [10, ex. 5.4.5].

Sei also $A \subset L$, card$(A) < \aleph_\alpha$. Sei $z$ eine freie Variable und $\Gamma(z)$ eine Menge von Formeln der Sprache $\mathbf{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$, die höchstens $z$ frei enthalten. Wir nehmen an, daß $\Gamma(z)$ zu $Th(L, a)_{a \in A}$ konsistent ist und müssen zeigen, daß ein $b \in L$ existiert, das $\Gamma(z)$ erfüllt. ($\mathbf{L}$ sei die Sprache der Theorie der angeordneten Körper.)

Es gibt auf jeden Fall eine Erweiterung $\tilde{L} \supset L \supset K$ und $\tilde{b} \in \tilde{L}$, O.E. $\notin L$, das $\Gamma(z)$ erfüllt. Wir betrachten den Körper $L_0 := \mathfrak{r}(K(A)) \subset L$. Es gilt: tr. $\deg_K(L_0) \leqslant$ card$(A) < \aleph_\alpha$, also ist nach 4.9 $L_0$ ein $\zeta_\beta$-Körper für ein $\beta < \alpha$. Das Element $\tilde{b}$ definiert in $L_0$ einen Schnitt $B < \tilde{b} < C$, $B \cup C = L_0$. In $B$ können wir eine nach oben konfinale Teilmenge $B'$ und ebenso in $C$ eine nach unten konfinale Teilmenge $C'$ finden, sodaß card$(B' \cup C') \leqslant \aleph_\beta$(vgl. den Beweis von 2.5!). Weil nun $L$ ein $\eta_\alpha$-Körper ist, existiert ein $b \in L$ mit $B' < b < C'$. Wegen der Konfinalität folgt $B < b < C$. Da $L_0$ reell abgeschlossen ist, kann man nach Lemma 2.4 die identische Abbildung $L_0 \to L_0$ derart zu einem Isomorphismus $\varphi$ fortsetzen, daß $\varphi: L_0(\tilde{b}) \to L_0(b)$, $\varphi(\tilde{b}) = b$. Nach dem in 2.8 Gesagten kann man o.E. alle Formeln von $\Gamma(z)$ offen wählen, und mit dieser Annahme ist klar, daß mit $\tilde{b}$ auch $b$ alle Formeln von $\Gamma(z)$ erfüllt, denn dann bauen sich die Formeln von $\Gamma(z)$ nur aus Prädikaten, Junktoren, Konstanten $c_a$, und der Variablen $z$ auf. Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 3. Der Transzendenzgrad von $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ über $k$, und explizite Konstruktion kontinuierlich vieler Transzendenter

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist

Satz 3.1. *Bezeichne* $\mathfrak{m}$ *stets ein maximales nicht fixiertes Ideal.*

(1) *Für endliche Körper* $k$ *ist die kanonische Einbettung von* $k$ *in* $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ *ein Isomorphismus.*

(2) *Für jeden unendlichen Körper* $k$ *gilt*

$$\text{tr.}\deg_k k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} = \operatorname{card}(k)^{\aleph_0}, \text{ unabhängig von } \mathfrak{m}.$$

*Beweis.* (1) gilt allgemeiner für Ultrapotenzen von Mengen ([10, Ch. 3.6]). Was (2) angeht, reicht es offensichtlich zu zeigen: $\text{tr.}\deg_k K \geqslant \operatorname{card}(k)^{\aleph_0}$ ($K := k^{N}/\mathfrak{m}$).

Dies kann in folgende Schritte zerlegt werden:

(a) $\text{tr.}\deg_k(K) \geqslant \operatorname{card}(k)$.

(b) $\operatorname{card}(K) \geqslant \operatorname{card}(k)^{\aleph_0}$.

Begründung: Angenommen, (a) und (b) gelten. Da $k$ unendlich ist, gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(K) &= \operatorname{card}(k) \cdot \text{tr.}\deg_k(K)\\ &= \max(\operatorname{card}(k), \text{tr.}\deg_k(K)).\end{aligned}$$

Wegen (a) folgt $\operatorname{card}(K) = \text{tr.}\deg_k(K)$ und jetzt folgt mit (b) die Behauptung.

Falls $k$ abzählbar ist, sind wir also fertig; denn $\text{tr.}\deg_k(K)$ kann nicht endlich sein (sonst wäre $K$ abzählbar), und die Formel $\operatorname{card}(K) = \mathfrak{c}$ ist in diesem Fall relativ leicht zu zeigen (vgl. [6]). Sei also $k$ ab jetzt überabzählbar. Wir benötigen ein Lemma:

Lemma 3.2. *Seien* $K \subset L$ *Körper,* $i$ *die kanonische Injektion von* $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ *in* $L^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ *(über die Verwendung des Buchstabens* $\mathfrak{m}$ *siehe Bem. nach* 1.1). *Dann sind* $i(K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m})$ *und* $L$ *in* $L^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ *linear disjunkt über* $K$. *(Zwei Teilkörper* $M_0$, $M_1$ *eines Körpers* $M$ *heißen linear disjunkt über* $M_0$, $M_0 \subset M_1$, $M_2$, *wenn jede* $M_0$*-lin. unabhängige Familie in* $M_2$ *bereits* $M_1$*-linear unabhängig ist. Nach* [*Lang, Introduction to Algebraic Geometry, p.* 49] *ist diese Bedingung in* $M_1$ *und* $M_2$ *symmetrisch.)*

*Beweis.* Es ist zu zeigen, daß jede $K$-linear unabhängige Familie in $L$ bereits $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$-linear unabhängig in $L^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ ist. Dies ist aber leicht einzusehen.

Indem man in der Definition der linearen Disjunktheit $L$ und $K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ miteinander vertauscht und ausnützt, daß eine Familie genau dann algebraisch unabhängig ist, wenn die Familie ihrer Potenzprodukte linear unabhängig ist, erhält man das

KOROLLAR. tr. $\deg_K K^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} \leqslant$ tr. $\deg_L L^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$.

Wir kehren zum Beweis von 3.1, (2) für überabzählbares $k$ zurück:

Bekanntlich ist für beliebige Körper $L_1 \subset L_2$ immer $\operatorname{card}(L_2) \leqslant \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(L_1) \cdot$ tr. $\deg_{L_1} L_2$. Seien speziell $L_2 = k$, $L_1 =$ Primkörper von $k =: \mathbf{P}$. Wegen $\operatorname{card}(\mathbf{P}) \leqslant \aleph_0$ ergibt sich $\operatorname{card}(k) \leqslant$ tr. $\deg_{\mathbf{P}} k$, also $\operatorname{card}(k) =$ tr. $\deg_{\mathbf{P}} k$. Sei $(t_i)_{i \in I}$ eine Transzendenzbasis von $k$ über $\mathbf{P}$. Dann ist also $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(k)$. Wir bilden den Körper $k_0 := \mathbf{P}(t_i)_{i \in I} \subset k$. Offenbar ist auch $\operatorname{card}(k_0) = \operatorname{card}(k)$. Nach Korollar reicht es zu zeigen: tr. $\deg_{k_0} k_0^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} \geqslant \operatorname{card}(k_0)^{\aleph_0}$ $(= \operatorname{card}(k)^{\aleph_0})$. Wir schreiben für $k_0$ wieder $k$ und haben also eine Reduktion auf den Fall "$k$ ist über seinem Primkörper rein transzendent mit der Transzendenzbasis $(t_i)_{i \in I}$; $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(k)$" vollzogen. Wir müssen jetzt die Ungleichungen (a) und (b) zeigen.

*Beweis von* (a). Wir definieren eine mit $I$ indizierte Familie von $k$-algebraisch unabhängigen Elementen von $K$. Dazu setzen wir fest: Für $x \in k$ sei $\mathbf{x} :=$ Klasse der Folge $(x, x^2, x^3, \ldots)$ in $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m} = K$. Wir benützen nun die Transzendenzbasis $(t_i)$ und behaupten, daß die Familie $(\mathbf{t}_i)_{i \in I}$ $k$-algebraisch unabhängig ist.

Ein gegebenes Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ schreiben wir mit Multiindizes: $P = \sum_{\alpha \in J} F_\alpha \cdot X^\alpha$, für alle $\alpha$: $0 \neq F_\alpha \in k = \mathbf{P}(t_i)_{i \in I}$. Wir zeigen durch Induktion über $\deg(P) + n$: Für $P \neq 0$ ist $P(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n) \neq 0$ (hierbei dient $t_j$ als Abkürzung von $t_{i_j}$). Dabei dürfen wir annehmen, daß die $F_\alpha \in \mathbf{P}[t_i]_{i \in I}$ sind, denn $k = \operatorname{Quot}(\mathbf{P}[t_i]_{i \in I})$.

Sei $P(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n) = 0$. Das heißt in suggestiver Schreibweise:

$$0 = \sum_{\alpha \in J} F_\alpha \cdot \mathbf{t}^\alpha \qquad \text{mit} \quad t^\alpha := t_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot t_n^{\alpha_n}.$$

Für alle $\lambda \in A \subset \mathbb{N}$ ist also $\sum_\alpha F_\alpha \cdot (t^\alpha)^\lambda = 0$, wobei $B = \mathbb{N} - A$ Träger eines Idempotents $e$ aus $\mathfrak{m}$ ist. O.E. haben nicht alle Monome $t^\alpha$ denselben Grad in $t_1$, sonst könnte man nämlich in $F$ alle gemeinsamen Faktoren $X_1$ ausklammern, wobei sich der Grad von $F$ verringert, falls $X_1$ überhaupt mit positivem Exponenten auftritt. Andernfalls ist $F$ ein Polynom in $n - 1$ Variablen. In beiden Fällen kann man die Induktionsvoraussetzung verwenden. Also gibt es ein $0 < m \in \mathbb{N}$ und eine Partition $J = J_1 \cup J_2$ mit nichtleeren $J_1$, $J_2$, mit:

$$\sum_{\alpha \in J_1} F_\alpha \cdot (t^\alpha)^\lambda = -\sum_{\alpha \in J_2} F_\alpha \cdot (t^\alpha)^\lambda$$

für alle $\lambda \in A$, wobei $\alpha \in J_1 \Leftrightarrow \alpha \in J$ und $t^\alpha$ hat in $t_1$ den Grad $m$; $\alpha \in J_1 \Leftrightarrow \alpha \in J$ und $t^\alpha$ hat in $t_1$ Grad höchstens $m - 1$. Es gelten

(#) Die linke Seite der Gleichung ist durch $t_1^{m\lambda}$ teilbar.

(##) Der Grad der rechten Seite der Gleichung in $t_1$ ist höchstens $\max(\deg_{t_1}(F_\alpha) \mid \alpha \in J_2) + \lambda \cdot (m - 1)$.

(#) und (##) können für $\lambda > \max(\deg_{t_1}(F_\alpha) \mid \alpha \in J_2)$ nur dann beide wahr sein, wenn beide Seiten der Gleichung Null sind. Also gilt für fast alle $\lambda \in A$: $\sum_{\alpha\in J_1} F_\alpha \cdot t^{\alpha\lambda} = 0$. Diese Gleichung können wir durch $t_1{}^m$ kürzen und erhalten für fast alle $\lambda \in A$:

$$G(t_1{}^\lambda,\dots, t_n{}^\lambda) = 0 \qquad \text{mit} \quad G := \sum_{\alpha\in J_1} F_\alpha \cdot X^\alpha/X_1{}^m.$$

Die Gleichung gilt also für alle $\lambda \in A'$, wobei $\mathbb{N} - A'$ Träger eines Idempotents $e'$ ist, das fast überall mit $e$ übereinstimmt und deshalb ($k^{(\mathbb{N})} \subset \mathfrak{m}$) auch in $\mathfrak{m}$ liegt. Daraus folgt: $G(\mathbf{t}_1 ,\dots, \mathbf{t}_n)$ ist Null in $k^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$. Der Grad von $G$ ist kleiner als der von $P$, mit der Induktionsvoraussetzung folgt also der gewünschte Widerspruch. (Der Induktionsanfang ist natürlich trivial.)

*Beweis von* (b). Wir wollen eine Injektion $T$: $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, I) \to K$ definieren und wählen hierzu eine Partition $I = \bigcup\{I_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ und Bijektionen $\varphi_\nu: I \to I_\nu$. Das ist möglich, weil $I$ unendlich ist.

Für $f: \mathbb{N} \to I$ setzen wir $T(f) :=$ Restklasse von $(x_\lambda)$, $x_\lambda := \sum_{\nu=1}^{\lambda} t_{\varphi_\nu(f(\nu))}$. Seien $f$, $g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, I)$ mit $T(f) = T(g)$. Aus dieser gleichheit folgt: Für *unendlich* viele $\lambda \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} t_{\varphi_\nu(f(\nu))} = \sum_{\nu=1}^{\lambda} t_{\varphi_\nu(g(\nu))}\,.$$

Weil die $t_i$ $\mathbf{P}$-linear unabhängig und die $Bi(\varphi_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, alle disjunkt sind, muß für $1 \leqslant \nu \leqslant \lambda$ $\varphi_\nu(f(\nu)) = \varphi_\nu(g(\nu))$, also $f(\nu) = g(\nu)$ sein. Das gilt für unendlich viele $\lambda$, also ist $f = g$. Q.E.D.

*Bemerkung* 3.3. Jede unendliche Menge läßt sich auf mindestens eine Weise mit der Struktur eines über dem Primkörper rein transzendenten Körpers versehen. Daraus ergibt sich, daß wir mit (b) (s.o.) für eine beliebige Menge $M$ gezeigt haben: Die Kardinalität einer Ultrapotenz $M^{\mathbb{N}}/\mathfrak{F}$ ist mindestens (und deshalb gleich) $\mathrm{card}(M)^{\aleph_0}$.

Die hier gezeigte Kardinalitätsaussage (b) wird in Standardwerken [6, 10] mittels sog. regulärer Ultrafilter bewiesen. Der hier gegebene Beweis ist wohl eine Vereinfachung.

## 4. Volle Potenzreihenkörper und $\zeta_0$-Körper

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts wird der bereits verwendete Satz über die Vererbung der $\zeta_0$-Eigenschaft von $k$ auf alle $K$ mit tr. $\deg_k(K) \leqslant \aleph_0$ sein, aus dem insbesondere folgt, daß alle angeordneten Körper $K$, die höchstens abzählbaren Transzendenzgrad über einem Unterkörper der reellen Zahlen haben, $\zeta_0$-Körper sind.

Wir beginnen mit zwei trivialen Lemmata:

LEMMA 4.1. *Ein angeordneter Körper $K$ ist genau dann $\zeta_0$, wenn keine strikt monoton wachsenden Abbildungen $\aleph_1 \to K$ existieren. Insbesondere vererbt sich die $\zeta_0$-Eigenschaft auf Unterkörper.*

LEMMA 4.2. *Seien $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ Körper, und für alle $n$ sei $K_n$ $\zeta_0$. Dann ist $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ein $\zeta_0$-Körper.*

*Beweis.* Sei $A \subset K$ gegeben. Zu jedem $A_n := A \cap K_n$ wähle eine höchstens abzählbare, in $K_n$ nach oben konfinale Teilmenge $A'_n$. Die Menge $A' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$ ist wieder höchstens abzählbar und offenbar in $K$ mit $A$ nach oben konfinal. In diesem Argument kann man "oben" durch "unten" ersetzen und erhält die Behauptung.

Da jeder (reell abgeschlossene) Oberkörper $K$ eines Körpers $k$ mit tr. $\deg(K) = \aleph_0$ aufsteigende Vereinigung abzählbar vieler (reell abgeschlossener) Körper $K_n$ mit tr. $\deg_k(K_n) = n$ ist, können wir uns nach Lemma 4.2 auf den Fall endlichen Transzendenzgrads über $k$ konzentrieren. Nach Lemma 4.1 reicht es also, jeden reell abgeschlossenen (und damit schon jeden angeordneten) Körper $K$ mit tr. $\deg_k(K) = n$ in einem speziellen Körper $k(n, K)$ einzubetten, von dem wir zeigen können, daß er $\zeta_0$-Körper ist. Die Körper $k(n, K)$ werden für große Klassen von $K$'s dieselben sein, sind also in gewissem Sinn universell. Es ist daher nicht erstaunlich, daß man sehr große Körper (in unserer Arbeit volle Potenzreihenkörper) nehmen muß.

Die nächsten Definitionen und Sätze dienen der Konstruktion der $k(n, K)$. Sei zunächst $k$ irgendein fester Körper.

DEFINITION. Sei $G$ irgendeine angeordnete abelsche Gruppe. Der *Körper der vollen Potenzreihen über $k$ mit Exponenten in $G$*, i.Z. $k\langle G\rangle$, ist folgendermaßen erklärt:

Als Menge sei $k\langle G\rangle := \{f \in \mathrm{Abb}(G, k) \mid \mathrm{trg}(f)$ ist wohlgeordnete Teilmenge von $G\}$. Wir schreiben $f =: \sum_{\rho \in G} f(\rho) \cdot T^\rho$. Weiter setzen wir für $\rho \in G$, $f, g \in k\langle G\rangle$: $(f + g)(\rho) := f(\rho) + g(\rho)$, $(f \cdot g)(\rho) := \sum_{\alpha+\beta=\rho} f(\alpha) \cdot g(\beta)$. (Diese Summe ist in Wirklichkeit endlich, weil die Menge der $\alpha$ mit der Eigenschaft $f(\alpha) \neq 0$ und $g(\rho - \alpha) \neq 0$ nach Vor. über $f$ und $g$ zugleich wohlgeordnet und anti-wohlgeordnet und deshalb zwangsläufig endlich ist.)

Nach [8, Ch. 6, §3, ex. 2] (Spezialfall $G = \mathbb{R}$) oder nach [18a] machen diese Definitionen $k\langle G\rangle$ zu einem Körper.

Falls $k$ angeordnet ist, nennen wir ein Element $f \in k\langle G\rangle, f \neq 0$, positiv, wenn $f(\min(\mathrm{trg}(f)))$ in $k$ positiv ist. Dadurch wird eine Anordnung von $k\langle G\rangle$ definiert, die diejenige von $k$ fortsetzt. $f(\min(\mathrm{trg}(f)))$ heißt *Leitkoeffizient* von $f$, und $\mathrm{ord}(f) := \min(\mathrm{trg}(f))$ die *Ordnung* von $f$.

SATZ 4.3. *Sei* $\operatorname{char}(k) = 0$, *k algebraisch bzw. reell abgeschlossen. und die Gruppe G teilbar. Dann ist auch* $k\langle G\rangle$ *algebraisch bzw. reell abgeschlossen.* ($G$ *teilbar*: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}: nG = G$.)

*Beweis.* Siehe Alling [1a, Bem. vor 3.1].

*Bemerkung* 4.4. Man kann zeigen (vgl. [22, p. 53]), daß für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ der Char. 0 auch der Körper ind lim $k((T^{1/n})) \simeq \{f \in k\langle\mathbb{R}\rangle: \exists n$ mit $\operatorname{trg}(f) \subset (1/n)\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}\}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dieser Satz ist in Charakteristik $p$ falsch! (Vgl. [7, p. 286, Bem. sowie p. 287, Aufg. 6].)

Wir steuern jetzt auf den Satz zu, daß für eine $\zeta_0$-Gruppe $G$ und einen $\zeta_0$-Körper $k$ der Körper $k\langle G\rangle$ $\zeta_0$ ist. Dazu vereinbaren wir folgende Schreibweise:

DEFINITION. Sei $k$ ein beliebiger Körper, und $f, g \in k\langle G\rangle$. $f$ und $g$ sind also Abbildungen $G \to k$. Wir schreiben

$$f \equiv g \bmod T^{>\alpha},$$

falls $f|_{(-\infty,\alpha]} = g|_{(-\infty,\alpha]}$, und ähnlich

$$f \equiv g \bmod T^{\alpha},$$

falls $f|_{(-\infty,\alpha]} = g|_{(-\infty,\alpha]}$ $(\alpha \in G)$.

LEMMA 4.5. *K sei ein angeordneter Körper, G eine angeordnete abelsche Gruppe, die als Menge* $\zeta_0$ *ist, und sei A eine Teilmenge von* $K\langle G\rangle$, *die kein größtes Element besitzt. Dann existiert in A immer eine nach oben konfinale Teilmenge C einer der folgenden vier Typen:*

$\square$1: $C = \{h_\tau \mid \tau \in \zeta\}$, *wobei* $\zeta$ *eine abzählbare Limeszahl ist und mit einer Folge* $(e_\tau)_{\tau\in\zeta} \subset G$ *gilt*: $\sigma < \tau \Rightarrow h_\sigma \equiv h_\tau \bmod T^{>e_\sigma}$, $(h_\tau)$ *und* $(e_\tau)$ *monoton wachsend*, $\operatorname{ord}(h_{\tau+1} - h_\tau) = e_{\tau+1}$ *für alle* $\tau$.

$\square$2: $C = \{f_0 + f_a \mid a \in A'\}$, *wobei* $A' \subset K$, *und für ein* $\gamma_0 \in G$ *gilt* $\operatorname{ord}(f_a) = \gamma_0$ *für alle* $a \in A'$, $f_a(\gamma_0) =$ *Leitkoeffizient von* $f_a = a$ *für alle* $a \in A'$, $A'$ *hat kein größtes Element.*

$\square$3: $C = \{f_0 - g_{\alpha_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\alpha_i \in G$ *monoton wachsend*, $0 < g_{\alpha_i}$, $\operatorname{ord}(g_{\alpha_i}) = \alpha_i$ *für alle i.*

$\square$4: $C = \{f_0 + g_{\epsilon_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\epsilon_i \in G$ *monoton fallend*, $0 < g_{\epsilon_i}$, $\operatorname{ord}(g_{\epsilon_i}) = \epsilon_i$ *für alle i.*

*Beweis.* Durch transfinite Induktion über $\gamma \in \aleph_1$ definieren wir folgende Größen:

$$e_\gamma \in G,\ (e_\gamma) \text{ strikt monoton steigend,}$$

$$h_\gamma \in A,\ (h_\gamma) \text{ strikt monoton steigend,}$$

mit

$$(\#1):\quad h \equiv h_\gamma \bmod T^{>e_\gamma} \qquad \text{für } h \in A,\ h \geqslant h_\gamma\,.$$
$$(\#2):\quad \mathrm{ord}(h_\gamma - h_{\gamma-1}) = e_\gamma\,,\ \text{falls } \gamma \text{ Nachfolgerzahl.}$$

Diese Konstruktion führen wir unter der Annahme durch, daß es in $A$ *keine* nach oben konfinale Teilmenge der Typen □1–□4 gibt. Wenn die Konstruktion gelingt, ist der Beweis fertig, denn in $G$ kann es keine mit $\aleph_1$ indizierte strikt monoton wachsende Folge $(e_\gamma)$ geben ($G$ ist $\zeta_0$!).

*Induktionsanfang*: $\gamma = 0$

1. Fall: $A < 0$. Für $f,\ f' < 0,\ f,\ f' \in k\langle G\rangle$ gilt $\mathrm{ord}(f) < \mathrm{ord}(f') \Rightarrow f < f'$. Betrachte $G \supset M := \{\mathrm{ord}(f) \mid f \in A\}$. Hat $M$ kein größtes Element, wähle eine strikt monoton wachsende, abzählbare, in $M$ nach oben konfinale Folge $\alpha_i \in M$ und Elemente $f_{\alpha_i} \in A$ mit $\mathrm{ord}(f_{\alpha_i}) = \alpha_i$. Dann ist $\{f_{\alpha_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ konfinal vom Typ □3. Nach Annahme kann das nicht sein, also hat $M$ ein größtes Element $\varphi_0$. Somit gilt also für einen nichtleeren oberen Abschnitt $A'$ von $A$: $f \in A' \Rightarrow \mathrm{ord}(f) = \varphi_0$. Wir vergleichen jetzt die Leitkoeffizienten der $f \in A'$; $\tilde{A} := \{a \in K \mid a$ ist Leitkoeff. eines $f \in A'\}$. Wenn $\tilde{A}$ kein größtes Element hat, wählen wir zu jedem $a \in \tilde{A}$ ein $f_a \in A'$ mit dem Leitkoeffizienten $a$. Die $f_a$ bilden dann eine Menge vom Typ □2, die in $A'$ und damit auch in $A$ nach oben konfinal ist. Auch das ist nach Annahme ausgeschlossen, also hat $\tilde{A}$ ein größtes Element $a_{\max}$. Für einen nichtleeren oberen Abschnitt $A'' \subset A'$ gilt folglich: $f \in A'' \Rightarrow$ Leitkoeffizient von $f$ ist $a_{\max}$ (und $\mathrm{ord}(f) = \varphi_0) \Rightarrow f \equiv a_{\max} \cdot T^{\varphi_0} \bmod T^{>\varphi_0}$. Setze $e_0 := \varphi_0$, $h_0 \in A''$ beliebig. Damit ist (#1) erfüllt, und Bedingung (#2) ist leer.

2. Fall: $A \cap (0, \infty) \neq \varnothing$. (Der Fall $\max(A) = 0$ ist ausgeschlossen.) Wir gehen zu dem oberen Abschnitt $A \cap (0, \infty)$ über, d.h. wir nehmen gleich an: $0 < A$. Jetzt gehen wir ähnlich vor wir oben. Man setzt $M = \{\mathrm{ord}(f) \mid f \in A\}$ und zeigt durch Widerspruch, daß $M$ ein kleinstes Element hat (für $f,\ f' \in k\langle G\rangle,\ f,\ f' > 0$ gilt $\mathrm{ord}(f') < \mathrm{ord}(f) \Rightarrow f < f'$). Hierbei ist "Typ □3" natürlich durch "Typ □4" zu ersetzen. Für einen nichtleeren oberen Abschnitt $A'$ von $A$ gilt also wieder: $f \in A' \Rightarrow \mathrm{ord}(f) = \varphi_0$. Der Rest des Verfahrens (Konstruktion von $\tilde{A}$, $A''$, $e_0$, $h_0$) läuft so ab wie im 1. Fall.

***Induktionsschluß*** $\gamma \to \gamma + 1$. Wir betrachten $A^* := \{f \in A \mid f > h_\gamma\}$. $A^* \neq \varnothing$, denn $A$ hat kein größtes Element. Wir transferieren $A^*$ um $-h_\gamma$ und erhalten $0 < A^{**} := A^* - h_\gamma$, und für $f \in A^{**}$ gilt $\mathrm{ord}(f) > e_\gamma$ nach Vor. (#1) für $\gamma$. Mit der Menge $A^{**}$ führen wir jetzt dasselbe durch wie mit $A$ im zweiten Fall des Induktionsanfangs: entweder erhalten wir sofort eine konfinale Teilmenge von $A^{**}$ vom Typ □4, was nach Annahme nicht geht, oder das Minimum $\varphi_0$ (s.o.) wird angenommen. Insbesondere ist dann $\varphi_0 > e_\gamma$. Wie oben erhält man einen nichtleeren oberen Abschnitt $A'' \subset A^{**}$ mit $f \in A'' \Rightarrow f \equiv a_{\max} \cdot T^{\varphi_0} \bmod T^{>\varphi_0}$, wobei $a_{\max}$ ein festes Element von $K$ ist (hierbei verwendet man, wie schon oben, daß nach Annahme in $A^{**}$ keine konfinale Teilmenge vom Typ $\square 2$ existiert). Wir setzen $e_{\gamma+1} := \varphi_0$, $h_{\gamma+1} := h_\gamma + g$, $g \in A''$ beliebig. Damit ist (#2) für $\gamma + 1$ erfüllt. Sei $h > h_{\gamma+1} \in A$. Es folgt: $h - h_\gamma \in A^{**}$, mit $h - h_\gamma > g \Rightarrow h - h_\gamma \in A'' \Rightarrow h - h_\gamma \equiv g \bmod T^{>e_{\gamma+1}}$. Zur letzten Kongruenz addieren wir wieder $h_\gamma$ und erhalten $h \equiv g + h_\gamma = h_{\gamma+1} \bmod T^{>e_{\gamma+1}}$, also gilt auch (#1) für $\gamma + 1$.

*Induktionsschluß auf* $\gamma = \sup(\gamma_i \mid i \in \mathbb{N})$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$ Die Menge $\{h_{\gamma_1}, h_{\gamma_2}, \ldots\}$ ist vom Typ $\square 1$, also nach Annahme in $A$ nicht nach oben konfinal. Wir können also wieder den nichtleeren Abschnitt $A^* := \{f \in A \mid f > h_{\gamma_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}\}$ betrachten. Nach Induktionsvoraussetzung sind die $h_{\gamma_i}$ in gewissem Sinn kompatibel: man sieht leicht, daß ein $h^* \in K\langle G\rangle$ mit: $h^* \equiv h_{\gamma_i} \bmod T^{>e_{\gamma_i}}$ für alle $i$ existiert. (Dies fällt unter die sogenannte $\aleph_1$-Pseudokomplettheit von $K\langle G\rangle$.) Für $f \in A^*$ gilt: $f \equiv h_{\gamma_i} \bmod T^{>e_{\gamma_i}}$ für alle $i$ nach I.V., woraus leicht folgt: $\mathrm{ord}(f - h^*) > e_{\gamma_i}$ für alle $i$. Wir bilden wieder die transferierte Menge $A^{**} := A^* - h^*$ und unterwerfen $A^{**}$ derselben Prozedur wie $A$ im Induktionsanfang (hier braucht man wieder beide Fälle). Genau wie dort kommt man unter der Annahme, daß keine konfinalen Teilmengen vom Typ $\square 2$–4 in $A$ existieren, zu einem $\varphi_0$ und einem nichtleeren Abschnitt $A''$ von $A^{**}$ mit den dort angegebenen Eigenschaften. Insbesondere gilt für $b, c \in A''$: $b \equiv c \bmod T^{>\varphi_0}$. Wir setzen $e_\gamma := \varphi_0$, $h_\gamma := h^* + g$, $g \in A''$ beliebig (also $h_\gamma \in A$). (#2) ist hier eine leere Bedingung, wir prüfen (#1): Sei $h \in A$, $h > h_\gamma$. $A^* - h^*$ ist ein Abschnitt von $A - h^*$, und $h_\gamma - h^* \in A^* - h^* = A^{**}$, also ist auch $h - h^* \in A^{**}$. Folglich impliziert die Tatsache $h - h^* > g$ die Aussage $h - h^* \in A''$. $\Rightarrow h - h^* \equiv g \bmod T^{>e_\gamma} \Rightarrow h \equiv h^* + g = h_\gamma \bmod T^{>e_\gamma}$. Q.E.D.

Damit ist 4.5 bewiesen. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

SATZ 4.6. *Für jede $\zeta_0$-Gruppe $G$ und jeden $\zeta_0$-Körper $K$ ist $K\langle G\rangle$ ein $\zeta_0$-Körper.*

*Beweis.* Besitze $A \subset K\langle G\rangle$ kein Maximum. Zu $A$ kann man nach 4.5 eine konfinale Teilmenge $C$ des Typs $\square 1$–$\square 4$ wählen. In den Fällen $\square 1$, 3, 4 ist $C$ von Haus aus abzählbar. Im Fall $\square 2$ hat man eine ordnungstreue Bijektion $C \to A'$, $A' \subset K$ durch $f \to$ Leitkoeff. von $f - f_0$. Nach Voraussetzung über $K$ besitzt $A'$ und damit auch $C$ eine höchstens abzählbare nach oben konfinale Teilmenge.

Jetzt beweisen wir das Hauptergebnis dieses Paragraphen:

SATZ 4.7. *Jede angeordnete Erweiterung $K \supset k$ eines $\zeta_0$-Körpers $k$ mit höchstens abzählbarem Transzendenzgrad über $k$ ist selbst ein $\zeta_0$-Körper.*

KOROLLAR. *Mit $k$ ist auch der reelle Abschluß $\mathfrak{r}k$ ein $\zeta_0$-Körper.*

*Bemerkung.* Die Voraussetzung des Satzes über den Transzendenzgrad ist notwendig, wie man durch Adjunktion "immer infinitesimalerer" Transzendenter an $\mathbb{R}$ leicht einsieht. Andererseits ist der Satz nicht umkehrbar, wie das Beispiel $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}((T))$ lehrt ($\mathbb{R}((T))$ ist $\zeta_0$, aber der Transzendenzgrad der Erweiterung ist $\mathfrak{c}$).

*Beweis des Satzes.* Am Anfang des Abschnitts führten wir aus, daß wir uns auf den Fall des Transzendenzgrads $n$, $n \in \mathbb{N}$, beschränken können. Außerdem dürfen wir $K$ als reell abgeschlossen voraussetzen.

Wir definieren eine nichtarchimedische Bewertung $V$ auf $K$: Sei $K_s = \{x \in K^* \mid \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+ \subset K: q_1 < |x| < q_2\}$. Dies ist eine multiplikative Untergruppe von $K^*$. Setze $\Gamma(K) := K^*/K_s$. $\Gamma(K)$ ist in kanonischer Weise angeordnete Gruppe: $0 := [1] \in \Gamma(K)$, $[x] > [y] :\Leftrightarrow |x/y| < \epsilon$ für alle positiven $\epsilon \in \mathbb{Q}$. (sic!)

Sei $V = [-]: K^* \to \Gamma(K)$. Dann ist $V$ eine nichtarchimedische Bewertung. Es ist nämlich für $x \neq -y \in K^*$: $V(x+y) = V(|x+y|) \geqslant V(|x|+|y|) \geqslant V(2 \cdot \max(|x|, |y|)) = V(\max(|x|, |y|) = \min(V(|x|), V(|y|)) = \min(V(x), V(y))$. Dabei wurde benützt, daß $V(z) = V(|z|)$ für $z \in K$ und daß für $0 < z \leqslant w \in K$ gilt $V(w) \leqslant V(z)$.

Der Restklassenkörper von $K$ bei $V$ ist ein Unterkörper der reellen Zahlen. Dazu überlegt man sich, daß der Bewertungsring $R$ von $K$ aus gerade den Elementen von $K$ besteht, die gegenüber $\mathbb{Q} \subset K$ dem Betrag nach nicht unendlich groß sind, und daß das Bewertungsideal $\mathfrak{p}$ aus gerade den Elementen besteht, deren Betrag gegenüber $\mathbb{Q}$ infinitesimal ist. Wir definieren $\varphi: R/\mathfrak{p} \to \mathbb{R}$, $[x] \to \sup_{\mathbb{R}}(r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant x) < +\infty$. $\varphi$ ist wohldefiniert und injektiv, denn für $x, y \in R$ gilt: $\sup_{\mathbb{R}}(r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant x) = \sup_{\mathbb{R}}(r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant y)$ genau dann, wenn $x - y$ infinitesimal ist. Außerdem ist $\varphi$ offenbar homomorph.

Für je zwei angeordnete Körper $K \subset L$ hat man das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} K & \subset & L \\ {\scriptstyle V_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V_L} \\ \Gamma(K) & \xrightarrow{\text{inj}} & \Gamma(L) \end{array}$$

Das folgende Lemma ist für sich schon interessant:

Lemma 4.8. *Der reell abg. Körper $K$ ist genau dann $\zeta_0$-Körper, wenn $\Gamma(K)$ $\zeta_0$-Gruppe ist.*

*Beweis.* Sei $k \subset \mathbb{R}$ der Restklassenkörper von $(K, V)$ (s. oben). Man sieht leicht, daß $k$ reell abgeschlossen ist. Nach [20, Ch. 2, Def. 8, 9, Thm. 5] existiert eine Erweiterung $L$ des bewerteten Körpers $K$, die dieselbe Wertegruppe $V(L) = \Gamma(K) =: \Gamma$ und denselben Restklassenkörper $k$ wie $K$ hat und außerdem maximal mit dieser Eigenschaft ist (solch ein $L$ heißt *maximal vollständig*). Wir zeigen, daß $L$ reell abgeschlossen ist. Wegen $i = (-1)^{1/2} \notin L$ (sonst könnte $k$ nicht formalreell sein) reicht es zu zeigen: $L(i)$ ist algebraisch abgeschlossen. Durch $V'(a + ib) := \min(V(a), V(b))$, $a, b \in L$, wird eine Bewertung von $L(i)$ definiert, wie man ohne große Mühe verifiziert, und der Restklassenkörper ist $k(i)$. Nach [20, Ch. 2, Thm. 6, 7] ist $(L, V)$ (wegen "maximal vollständig") henselsch, nach [23, p. 178, cor. 2] also auch die algebraische Erweiterung $L(i)$. In [5, p. 447] werden folgende hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß ein bewerteter Körper algebraisch abgeschlossen ist:

(a) die Wertegruppe (in unserem Fall also $\Gamma$) ist teilbar,

(b) der Körper ist in seiner Bewertung henselsch,

(c) der Restklassenkörper (in unserem Fall $k(i)$) ist algebraisch abgeschlossen.

Alle drei Bedingungen werden von $L(i)$ erfüllt. Q.E.D.

Weil $L$ also reell abgeschlossen ist, kann man aus jedem positiven Element von $L_s$ die positive $n$-te Wurzel in $L$ ziehen, die wieder in $L_s$ liegen muß. Also ist die abelsche Gruppe $L_s^+$ teilbar. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \to Ke(V) \cap L^{*+} \to L^{*+} \to \Gamma \to 0.$$

Da $Ke(V) \cap L^{*+} \neq L_s^+$ teilbar ($=$ injektiv, siehe [Maclane, Homology, p. 93]) ist, zerfällt die Sequenz, d.h. der Epimorphismus $V: L^{*+} \to \Gamma$ besitzt einen homomorphen Schnitt $\varphi: \Gamma \to L^{*+}$. Nach [16a, p. 315] existiert ein zu $k$ isomorpher Unterkörper $k'$ von $L$ mit $V(k'^*) = 0$. Die Körper $M := k'(\varphi(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma) \subset L$ und $P := k(T^\gamma \mid \gamma \in \Gamma) \subset k\langle\Gamma\rangle$ sind offenbar als bewertete Körper isomorph. $L$ ist eine maximal vollständige Erweiterung von $M$ mit gleicher Wertegruppe und gleichem Restklassenkörper wie $M$, und dasselbe gilt für die Erweiterung $P \subset k\langle\Gamma\rangle$, denn $k\langle\Gamma\rangle$ ist nach [20, p. 51 unten] maximal vollständig. Nach dem Eindeutigkeitssatz [16a, Thm. 5] sind also $L$ und $k\langle\Gamma\rangle$ als bewertete Körper isomorph, woraus die Existenz einer (von selbst ordnungstreuen!) Einbettung $K \to k\langle\Gamma\rangle$ folgt. Die Implikation "von $\Gamma$ nach $K$" folgt jetzt aus Lemma 4.1 und Satz 4.6.

(*Bemerkung.* Die Voraussetzung "$K$ reell abg." ist hier überflüssig. Weiter unten zeigen wir nämlich, daß sich die Eigenschaft "$\Gamma(-)$ ist $\zeta_0$" von $K$ auf den reellen Abschluß vererbt. Die leichte Richtung des Lemmas 4.8 zeigen wir ohnehin für beliebige angeordnete Körper $K$.)

Die andere Implikation ergibt sich leicht aus den ersten Teil von Lemma 4.1: Wenn $x_\alpha$, $\alpha \in \aleph_1$, eine strikt monoton wachsende Folge in $\Gamma(K)$ ist und $x_\alpha = [z_\alpha]$, $z_\alpha > 0$ für alle $\alpha$, so ist $z_\alpha$ eine strikt monoton fallende Folge in $K$.

Wir fahren im Beweis von 4.7 fort: Nach dem Lemma 4.8 müssen wir nur noch zeigen, daß $\Gamma(K)$ eine $\zeta_0$-Gruppe ist, wobei wir schon wissen, daß $\Gamma(k)$ eine $\zeta_0$-Gruppe ist. $\Gamma(K)$ ist teilbar, weil man in $K$ aus jedem positiven Element die $m$-te Wurzel ziehen kann. Als abelsche Gruppe ist $\Gamma(K)$ also ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wir wollen zeigen: $rk(\Gamma(K)/\Gamma(k)) \leqslant n$ ($=$ tr. $\deg_k(K)$). Dabei ist der

Rang $rk$ einer abelschen Gruppe $A$ die Maximalzahl $\mathbb{Z}$-linear unabhängiger Elemente in $A$.

Wir nehmen also an, die Elemente $[x_1],\ldots,[x_{n+1}] \in \Gamma(K)$ wären modulo $\Gamma(k)$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig. Behauptung: Die $x_i$ sind $k$-algebraisch unabhängig. Beweis: Sei $0 \neq P = \sum_{\alpha\in I} r_\alpha X^\alpha \in k[X_1,\ldots,X_{n+1}]$, $r_\alpha \neq 0$ für $\alpha \in I$. Dann sind die Elemente $V(r_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) = V(r_\alpha) + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot [x_i]$ für alle $\alpha \in I$ verschieden, da $V(r_\alpha) \in \Gamma(k) \subset \Gamma(K)$. Weil $V$ nichtarchimedisch ist, kann die Summe $\sum r_\alpha x^\alpha$ nicht Null sein.

Bezeichne nun $B \subset \Gamma(K)$ die kleinste teilbare Untergruppe, die $\Gamma(k)$ umfaßt. $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (1/i) \cdot \Gamma(k)$, und die Gruppe $(1/i) \cdot \Gamma(k)$ ist zur angeordneten Gruppe $\Gamma(k)$ isomorph. Als abzählbare Vereinigung von $\zeta_0$-Gruppen ist (ähnlich wie in 4.2) $B$ selbst eine $\zeta_0$-Gruppe. Aus der Vektorraumtheorie und der oben bewiesenen Rangabschätzung folgt, daß eine Untergruppe $C$ von $\Gamma(K)$ existiert mit $B \oplus C = \Gamma(K)$ und $rk(C) \leqslant rk(\Gamma(K)/\Gamma(k)) \leqslant n$. $C$ is torsionsfrei und teilbar von endlichem Rang, also abzählbar. Außerdem ist $\Gamma(K) = \bigcup_{c\in C} c + B$, wobei jede Nebenklasse $c + B$ eine $\zeta_0$-Menge ist. Wiederum folgt mit einem ähnlichen Schluß wie in 4.2, daß $\Gamma(K)$ $\zeta_0$ ist, was zu beweisen war.

FOLGERUNG 4.9. Sei wie in 4.7 $k$ ein $\zeta_0$-Körper und $K$ ein angeordneter Oberkörper von $k$ mit Transzendenzgrad höchstens $\aleph_\alpha$ über $k$. Dann ist $K$ ein $\zeta_\alpha$-Körper (wobei $\zeta_\alpha$ analog wie $\zeta_0$ definiert ist, ersetze in der Definition "höchstens abzählbar" durch "höchstens von der Kardinalität $\aleph_\alpha$").

*Beweis.* $K$ ist gerichteter Limes von $\leqslant \aleph_\alpha$ Teilkörpern, die alle endlichen Transzendenzgrad über $k$ haben, nach 4.7 also $\zeta_0$ sind. Die Behauptung folgt aus einer naheliegenden Verallgemeinerung von 4.2 auf $\zeta_\alpha$-Mengen.

*Bemerkung.* Die Beweise von Lemma 4.5 und Lemma 4.8 sind so angelegt, daß sie sich sofort auf höhere Kardinalzahlen übertragen, ebenso der eigentliche Beweis von 4.7. Die Behauptung von Folg. 4.9 gilt also sogar dann, wenn $k$ nur $\zeta_\alpha$ und nicht unbedingt schon $\zeta_0$ ist.

KOROLLAR 4.10. *Sei $k$ ein $\zeta_0$-Körper und $k \subset K$ ein $\eta_{\alpha+1}$-Körper. Dann ist* $\text{tr.deg}_k(K) \geqslant \aleph_{\alpha+1}$.

Der Beweis ist wegen 4.9 klar, denn die Eigenschaften $\zeta_\alpha$ und $\eta_{\alpha+1}$ schließen einander offenbar aus.

*Bemerkung* 4.11. Unter denselben Voraussetzungen wie in 4.10 gilt sogar: $\text{tr. deg}_k(K) \geqslant 2^{\aleph_\alpha}$

*Beweis.* Man kann leicht folgendes zeigen: Wenn $G$ eine $\eta_{\alpha+1}$-Gruppe ist und $H \subset G$ eine Untergruppe mit der Eigenschaft ist, daß $G/H$ in kanonischer Weise wieder angeordnet werden kann (d.h. konvex) und daß außerdem in $H$ ein nach oben konfinales Teilsystem mit höchstens $\aleph_\alpha$ Elementen existiert, dann ist $G/H$

wieder $\eta_{\alpha+1}$. Daraus folgt erst einmal: Mit $K$ ist auch $\Gamma(K) = K^*/K_s$ $\eta_{\alpha+1}$, denn $\mathbb{Q}$ ist in $K_s$ nach oben konfinal. Da aber mit $k$ ebenfalls $\Gamma(k)$ $\zeta_\alpha$ ist, folgt: Wenn $H := \{x \in \Gamma(K) \mid \exists y \in \Gamma(k): |x| \leqslant |y|\}$, so ist $H$ eine Untergruppe von $\Gamma(K)$ mit den eben beschriebenen Eigenschaften, und somit ist $\Gamma(K)/H$ $\eta_{\alpha+1}$-Gruppe. Nach einem schon früher erwähnten Ergebnis von Hausdorff hat $\Gamma(K)/H$ mindestens $2^{\aleph_\alpha}$ Elemente, woraus folgt: $2^{\aleph_\alpha} \leqslant rk(\Gamma(K)/H) \leqslant rk(\Gamma(K)/\Gamma(k))$. Wie im Beweis von 4.7 für $n$, so zeigt man allgemein: $rk(\Gamma(K)/\Gamma(k)) \leqslant \text{tr. deg}_k(K)$. Dies ergibt die Behauptung.

## 5. Eine Konstruktionsmethode für $\eta_\alpha$-Körper, und die Struktur von $\eta_1$-Körpern im Fall $\neg$ (CH)

Im Abschnitt 2 haben wir mit Hilfe der Kontinuumshypothese die Isomorphie gewisser $\eta_1$-Körper über irgendeinem $\zeta_0$-Körper, und damit insbesondere die Isomorphie aller Ultrapotenzen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ über $\mathbb{R}$ bewiesen. Das Folgende ist durch die Frage motiviert, inwieweit Satz 2.3 für $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ falsch ist. Es gelingt uns nicht, zu zeigen, daß in diesem Fall nichtisomorphe Ultrapotenzen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}_1 \not\cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}_2$ existieren. Immerhin können wir eine in [11] gestellte Frage negativ beantworten und gewisse Aussagen über die Konsistenz von Annahmen, die die Ordnungstruktur von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ betreffen, zur Mengenlehre ZFC machen.

Zuerst brauchen wir ein Konstruktionsverfahren für $\eta_1$-Körper, um zeigen zu können, daß nicht alle Quasi-$\rho$-Körper im Falle $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ isomorph sind (das ist die eben erwähnte Frage). Dabei nennen wir sinnvollerweise Quasi-$\rho$-Körper solche Körper, die $\eta_1$ und reell abgeschlossen sind und $\mathfrak{c}$ Elemente haben. Aus 4.11 folgt, daß Quasi-$\rho$-Körper über $\mathbb{R}$ stets Transzendenzgrad $\mathfrak{c}$ über $\mathbb{R}$ haben.

Lemma 5.1. *Sei $K$ ein reell abgeschlossener Körper, $A, B \subset K$, $A < B$ ein Schnitt ohne Lösung in $K$. Dann läßt sich die Anordnung von $K$ derart auf $K(X)$ fortsetzen, daß in $K(X)$ gilt $A < X < B$.*

*Beweis.* Wenn $K'$ eine angeordnete Erweiterung von $K$ ist und $s \in K'$ mit $A < s < B$, so liefert, weil $K$ reell abgeschlossen ist und $s \notin K$, die Abbildung $X \mapsto s$ einen algebraischen Isomorphismus $K(X) \cong K(s) \subset K'$, mit dessen Hilfe man $K(X)$ wie gewünscht anordnen kann.

In der Sprache der first-order Theorie der angeordneten Körper über $K$ (vgl. den Beweis von 2.2) betrachten wir die Formelmenge $\mathfrak{A} :=$ Axiome von $T_K \cup \{c_a < t < c_b \mid a \in A,\, b \in B\}$ ($t$ neue Konstante). Trivialerweise besitzt jede endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ein Modell (man kann $K$ nehmen), also besitzt nach dem Kompaktheitssatz ganz $\mathfrak{A}$ ein Modell $M$. Wir haben $K \subset M$ (nach Konstruktion von $T_K$), und die Interpretation von $t$ tut das Verlangte. (Vgl. etwa [21, p. 69].)

Jetzt beweisen wir einen Satz über die Existenz von gewissen Erweiterungen, die $\eta_\alpha$-Körper sind. Im Beweis erscheint unsere Konstruktionsmethode, die wir (modifiziert) anschließend noch benützen.

Wir erinnern an folgende Definition: Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt *regulär*, wenn sie nicht Limes einer Familie $F$, $\mathrm{card}(F) < \aleph_\alpha$, von kleineren Kardinalzahlen sein kann. $\aleph_{\alpha+1}$ ist stets regulär.

Satz 5.2. *Sei $K$ reell abgeschlossen mit $\aleph_\xi$ Elementen. Falls die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ regulär ist, kann man $K$ in einen reell abgeschlossenen $\eta_\alpha$-Körper der Kardinalität $\leqslant \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}$ einbetten. (Für Kardinalzahlen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{f}^{<\mathfrak{g}} := \sup(\mathfrak{f}^{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} < \mathfrak{g})$.)*

*Beweis.* Für einen beliebigen reell abgeschlossenen Körper $L$ definieren wir eine Erweiterung $L^\oplus$, die reell abgeschlossen ist und in der alle Schnitte $A < B$, $A \cup B \subset L$, $\mathrm{card}(A \cup B) < \aleph_\alpha$, eine Lösung haben. Sei $S = \{(A, B) \mid A \cup B \subset L, \mathrm{card}(A \cup B) < \aleph_\alpha, A < B\}$. Es ist $\mathrm{card}(S) \leqslant \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$, also können wir $S$ mit Indizes aus $\mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$ abzählen. Für $i \in \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$ werde $L_{i+1}$ aus $L_i$ folgendermaßen gewonnen: Falls der Schnitt $A_i < B_i$ in $L_i$ schon lösbar ist, setze $L_{i+1} := L_i$. Andernfalls adjungiere nach Lemma 5.1 ein transzendentes Element $t_i$ mit $A_i < t_i < B_i$ und schließe den erhaltenen angeordneten Körper reell ab. Für Limeszahlen $i$ sei wie üblich $L_i$ der induktive Limes der bereits konstruierten $L_j$, $j < i$, und $L_0 := L$. Wie man sofort sieht, leistet $L^\oplus := \mathrm{ind\,lim}\, L_i$, $i < \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$, das Gewünschte. Uns interessiert jetzt die Kardinalität von $L^\oplus$. Alle $L_i$ sind unendlich, also ist $\mathrm{card}(L_{i+1}) = \mathrm{card}(L_i)$. Für Limeszahlen $i$ gilt $\mathrm{card}(L_i) \leqslant \mathrm{card}(i) \cdot \sup(L_j) \mid j < i)$. Es ist leicht, aus diesen beiden Aussagen durch Induktion über $i < \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$ zu beweisen: $\mathrm{card}(L_i) \leqslant \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$. Dann ist aber auch $\mathrm{card}(L^\oplus) \leqslant \mathrm{card}(L)^{<\aleph_\alpha}$.

Jetzt soll der Schritt von $L$ auf $L^\oplus$ noch iteriert werden, und zwar über $j < \aleph_\alpha$. (Mit weniger kommt man nicht aus.) Wir setzen also $L^{(0)} := K$, $L^{(j+1)} := L^{(j)\oplus}$, und für Limeszahlen $j$ sei $L^{(j)}$ der induktive Limes der $L^{(k)}$, $k < j$. $\tilde{K} := \mathrm{ind\,lim}\, L^{(j)}$ ist dann eine Erweiterung von $K$, in der jeder Schnitt $A < B$; $A, B \subset \tilde{K}$, $\mathrm{card}(A \cup B) < \aleph_\alpha$, eine Lösung hat. Weil nämlich $\aleph_\alpha$ regulär ist, existiert ein $j_0 < \aleph_\alpha$ mit $A \cup B \subset L^{(j_0)}$, also hat der Schnitt $A < B$ schon in $L^{(j_0+1)} \subset \tilde{K}$ eine Lösung. $\tilde{K}$ ist außerdem als Limes der $L^{(j)}$ reell abgeschlossen. Zu bestimmen bleibt die Kardinalität von $\tilde{K}$. Wir zeigen durch Induktion über $j$: $\mathrm{card}(L^{(j)}) \leqslant \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}$. Für Limeszahlen $j$ hat man $\mathrm{card}(L^{(j)}) \leqslant \mathrm{card}(j) \cdot \sup(\mathrm{card}(L^{(k)}) \mid k < j)$, und $\mathrm{card}(j) < \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}$, hier funktioniert der Induktionsschluß also offenbar. $j = 0$ ist ganz trivial, und um den Schritt von $j$ auf $j + 1$ zu beweisen, muß man offenbar zeigen (vgl. o.):

$$(\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{<\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}.$$

Es ist $(\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{<\aleph_\alpha} = \sup((\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{\mathfrak{b}} \mid \mathfrak{b} < \aleph_\alpha)$, $(\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{\mathfrak{b}} = \mathrm{card}(\mathrm{Abb}(\mathfrak{b}, \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}))$, und es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Abb}(\mathfrak{b}, \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}) &= \mathrm{Abb}\left(\mathfrak{b}, \bigcup_{\mathfrak{e}<\aleph_\alpha} \aleph_\xi^{\mathfrak{e}}\right) \\ &= \lim_{\mathfrak{e}<\aleph_\alpha} \mathrm{Abb}(\mathfrak{b}, \aleph_\xi^{\mathfrak{e}}), \qquad (\text{wegen } \aleph_\alpha \text{ regulär, } \mathfrak{b} < \aleph_\alpha)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}(\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{\mathfrak{b}} &= \sup_{\mathfrak{e}<\aleph_\alpha} \aleph_\xi^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{e}} = \sup_{\mathfrak{e}<\aleph_\alpha} \aleph_\xi^{\mathfrak{e}} \qquad (\text{wegen } \mathfrak{b} < \aleph_\alpha) \\ &= \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha},\end{aligned}$$

also

$$(\aleph_\xi^{<\aleph_\alpha})^{<\aleph_\alpha} = \sup_{\mathfrak{b}<\aleph_\alpha} \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha} = \aleph_\xi^{<\aleph_\alpha}.$$

Damit ist Satz 5.2 gezeigt. Wir werden im folgenden auf die Operation $L \to L^{\oplus}$ zurückgreifen, ebenso wie auf die gezeigten Kardinalitätsabschätzungen.

SATZ 5.3. *Sei $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Dann existieren zwei Quasi-$\rho$-Körper $K_1$ und $K_2$ mit $cf(K_1) = \aleph_1$ und $cf(K_2) = \aleph_2$. Dabei bedeutet $cf(A)$ die Konfinalitätszahl der geordneten Menge $A$ nach oben*: $cf(A) = \min(\mathrm{card}(B) \mid B \subset A$ *nach oben konfinal*). *Insbesondere sind die Körper $K_1$ und $K_2$ nicht isomorph, denn ein Isomorphismus reell abgeschlossener Körper erhält automatisch die Ordnung. (Ein Analogon für $\eta_1$-Mengen findet man bei* [11a].)

*Beweis.* Zur Konstruktion von $K_1$ modifizieren wir den Schritt $-^{\oplus}$ aus 5.2 wie folgt: Für einen beliebigen reell abgeschlossenen Körper $L$ setzen wir $L^{\circ} :=$ reeller Abschluß von $L^{\oplus}(t)$, wobei $t$ eine Variable und $L^{\oplus}(t)$ derart angeordnet sei, daß $0 < t < \epsilon$ ist für alle positiven $\epsilon \in L^{\oplus}$. (Dies ist die Einschränkung der "lexikographischen" Anordnung auf dem Potenzreihenkörper, die wir früher schon erwähnt haben.)

Den Schritt $L \mapsto L^{\circ}$ kann man genauso wie den Schritt $L \mapsto L^{\oplus}$ iterieren, weil sich an den Kardinalitäten nichts ändert. Wörtlich genauso wie in 5.2 zeigt man, daß man mittels $L^{(0)} = \mathbb{R}$ und $\alpha := 1$ mit dem Körper $\tilde{K}$ einen reell abgeschlossenen $\eta_1$-Körper der Mächtigkeit $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ erhält, der $\mathbb{R}$ umfaßt. Nach Konstruktion ist die Familie $\{x_j \mid j < \aleph_1\}$ in $\tilde{K}$ konfinal, wenn gilt: $x_j \in L^{(j+1)}$, und $L^{(j)} < x_j$ in $L^{(j+1)}$. Da für jedes $L$ das Element $t^{-1} \in L^{\oplus}(t)$ die Bedingung $L < t^{-1}$ erfüllt, gibt es $x_j$ mit den verlangten Eigenschaften. Also hat $K_1 := \tilde{K}$ die Konfinalitätszahl $\aleph_1$ (abzählbare konfinale Teilmengen kann es im $\eta_1$-Körper $K_1$ nicht geben).

Zur Konstruktion von $K_2$ verwenden wir die Operation $L \mapsto L^{\circ}$ ebenfalls, iterieren sie aber diesmal über $j < \aleph_2$. $K_2 := \lim_{j \in \aleph_2} L^{(j)}$ ist dann ein reell abgeschlossener $\eta_1$-Körper (der Beweis aus 5.2 überträgt sich wieder). Genau wie oben erhält man eine konfinale Teilmenge $\{x_j \mid j < \aleph_2\}$. Nehmen wir an, daß auch die Folge $s_i$, $i < \aleph_1$ konfinal wäre. Zu jedem $i$ kann man ein $j(i) < \aleph_2$

finden mit $s_i \leqslant x_{j(i)}$. Das Supremum $j_0$ der $j(i)$, $i < \aleph_1$, ist kleiner als $\aleph_2$. Da die $s_i$ konfinal und die $x_j$ monoton wachsend sind, folgt für $j_0 \leqslant j < \aleph_2$: $K_2 \leqslant x_j$, ein offensichtlicher Widerspruch, weil $K_2$ kein größtes Element hat. Also hat $K_2$ die verlangte Konfinalitätszahl. Eine Inspektion des Beweises von 5.2 liefert, daß die Kardinalitätsabschätzung $\operatorname{card}(L^{(j)}) \leqslant \mathfrak{c}^{<\aleph_1} = \mathfrak{c}$ auch für $\aleph_1 \leqslant j \leqslant \aleph_2$ noch gilt (hierbei muß man natürlich $\aleph_2 \leqslant \mathfrak{c}$ verwenden). Damit ist alles gezeigt.

*Bemerkung.* Offenbar kann man für $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ regulär, ebenso auch einen Quasi-$\rho$-Körper mit Konfinalitätszahl $\mathfrak{b}$ finden. Es treten also unter den Quasi-$\rho$-Körpern alle nur denkbaren Konfinalitätszahlen auf. Uber $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ sagt dies noch nichts!

SATZ 5.4. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist folgende Aussage zu* ZFC (= Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom) konsistent: *Alle* Ultrapotenzen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ haben die Konfinalitätszahl $\aleph_n \wedge \mathfrak{c} \geqslant \aleph_2$.

*Bemerkung.* Leider ist damit nicht gezeigt, daß (CH) für Satz 2.3 notwendig ist. Der Satz 5.4 sagt nur, daß man über die Ordnungsstruktur von Körpern $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ wenig weiß. Es erscheint sehr schwierig, die Konsistenz der Aussage "Es gibt $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$: $cf(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}) = \aleph_1$ und $cf(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{n}) = \aleph_2$" zu beweisen, wenn sie nicht sogar falsch ist.

*Beweis des Satzes.* Wir stützen uns auf die Arbeit von Hechler [14], in der u.a. folgender Satz bewiesen wird:

Sei $H$ die Halbordnung $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, <\!\cdot)$, wobei $f <\!\cdot\, g \Leftrightarrow$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ ist $f(i) < g(i)$. Die folgende Annahme ist zu ZFC konsistent (falls ZFC widerspruchsfrei): In $H$ existiert eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge vom Ordnungstyp $\aleph_n$, $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_2$.

Die kanonische Abbildung $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ führt die Halbordnung $<\!\cdot$ in die Ordnungsrelation $<$ über, wenn $\mathfrak{m}$ nichtfixiertes maximales Ideal ist. Außerdem ist das Bild von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ konfinal. Sei nun $F \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ konfinal vom Ordnungstyp $\aleph_n$. Also ist das Bild von $F$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ konfinal. Anders ausgedrückt, haben wir eine ordnungserhaltende (nicht unbedingt injektive) Abbildung $\aleph_n \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$. Dasselbe Argument wie im Beweis von 5.3 zeigt, daß die Konfinalitätszahl von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ genau $\aleph_n$ ist (bei dem erwähnten Schluß ging nur ein, daß die untersuchte Menge kein größtes Element hatte).

Das Bemerkenswerte an der Aussage des Satzes in [14] und auch unseres Satzes 5.4 ist, daß die Kontinuumshypothese falsch sein kann, und gleichzeitig als Konfinalitätszahl von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und von Ultrapotenzen von $\mathbb{R}$ die Kardinalzahl $\aleph_1$ erscheinen kann.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor Pareigis herzlich danken. Ohne sein Interesse und seine Förderung wäre die Arbeit nicht in dieser Form zustandegekommen.

## LITERATUR


1a. N. ALLING, On the existence of real closed fields that are $\eta_\alpha$-sets of power $\aleph_\alpha$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), 341–352.
1. P. ALEXANDROFF, Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
2. E. ARTIN AND O. SCHREIER, Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **5** (1927), 85–99.
3. J. AX AND S. KOCHEN, Diophantine problems over local fields, I, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 605–630.
4. J. AX AND S. KOCHEN, Diophantine problems over local fields, II, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 631–648.
5. J. AX AND S. KOCHEN, Diophantine problems over local fields, III, *Ann. of Math.* (2) **83** (1965), 437–456.
6. J. BELL AND A. SLOMSON, "Models and Ultraproducts," North-Holland, Amsterdam, 1969.
7. S. BOREVIČ AND I. ŠAFAREVIČ, "Zahlentheorie," Birkhàuser, Basel, 1966.
8. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," Hermann, Paris, 1962.
9. P. CARRUTH, Generalized power series fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 548–559.
10. C. CHANG AND H. KEISLER, "Model theory," North-Holland, Amsterdam, 1973.
11. P. ERDÖS, L. GILLMAN, AND M. HENRIKSEN, An isomorphism theorem for real closed fields, *Ann. of Math.* (2) **61** (1955), 542–554.
12. L. GILLMAN AND W. SIERPINSKI, Some remarks on $\eta_\alpha$-sets, *Fund. Math.* **43** (1956), 77–82.
13. F. HAUSDORFF, "Grundzüge der Mengenlehre," Leipzig, 1914.
14. S. HECHLER, On the existence of certain cofinal subsets of ${}^\omega\omega$, "Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math. Vol. XIII, Part II, Univ. Cal., Los Angeles, 1967)," pp. 153–173, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
15. E. HEWITT, Rings of real-valued continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 45–99.
16. N. JACOBSON, "Abstract Algebra," II, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1953.
16a. I. KAPLANSKY, Maximal fields with valuations, I, *Duke Math. J.* **9** (1942), 303–321.
17. H. KEISLER, Ultraproducts and saturated models, *Indag. Math.* **26** (1964), 178–186.
17a. H. KEISLER, Good ideals in fields of sets, *Ann. of Math.* **79** (1964), 338–359.
18. S. LANG, "Algebra," Addison–Wesley, Reading, Mass., 1965.
18a. S. MACLANE, The universality of formal power series fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 888–890.
19. B. QUERENBURG, "Mengentheoretische Topologie," Springer-Verlag, Berlin, 1973.
20. O. SCHILLING, The Theory of Valuations, Amer. Math. Soc. Math. Surveys IV, Providence, R.I., 1950.
21. J. SHOENFIELD, "Mathematical Logic," Addison–Wesley, Reading Mass., 1967.
22. B. V. D. WAERDEN, "Einführung in die algebraische Geometrie," Springer-Verlag, Berlin, 1973.
23. P. RIBENBOIM, "Théorie des Valuations," Presses de l'université de Montréal, 1968.